



Matemáticas NS y Ampliación de Matemáticas NS: cuadernillo de fórmulas

Para su uso durante el curso y en los exámenes
Primeros exámenes: 2014

Edición de 2015 (2.ª versión)

Índice

Conocimientos previos	2
Tronco común	3
Unidad 1: Álgebra	3
Unidad 2: Funciones y ecuaciones	4
Unidad 3: Funciones circulares y trigonometría	4
Unidad 4: Vectores	5
Unidad 5: Estadística y probabilidad	6
Unidad 6: Análisis	8
Unidades opcionales	10
Unidad 7: Estadística y probabilidad	10
Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 3	
Unidad 8: Conjuntos, relaciones y grupos	11
Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 4	
Unidad 9: Análisis	11
Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 5	
Unidad 10: Matemática discreta	12
Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 6	
Fórmulas para las distribuciones	13
Unidades 5.6, 5.7 y 7.1, y unidad 3.1 de Ampliación de Matemáticas NS	
Distribuciones discretas	13
Distribuciones continuas	13
Ampliación de Matemáticas	14
Unidad 1: Álgebra lineal	14

Conocimientos previos

Área del paralelogramo	$A = b \times h$, siendo b la base y h la altura
Área del triángulo	$A = \frac{1}{2}(b \times h)$, siendo b la base y h la altura
Área del trapecio	$A = \frac{1}{2}(a + b)h$, siendo a y b los lados paralelos y h la altura
Área del círculo	$A = \pi r^2$, siendo r el radio
Longitud de la circunferencia	$C = 2\pi r$, siendo r el radio
Volumen de la pirámide	$V = \frac{1}{3}(\text{área de la base} \times \text{altura})$
Volumen del ortoedro	$V = l \times a \times h$, siendo l el largo, a el ancho y h la altura
Volumen del cilindro	$V = \pi r^2 h$, siendo r el radio y h la altura
Área lateral del cilindro	$A = 2\pi r h$, siendo r el radio y h la altura
Volumen de la esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, siendo r el radio
Volumen del cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, siendo r el radio y h la altura
Distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Coordenadas del punto medio de un segmento de recta que tiene por extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$
Soluciones de la ecuación cuadrática	Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Unidad I: Álgebra

<p>1.1</p>	<p>Término enésimo de una progresión aritmética</p> <p>Suma de n términos de una progresión aritmética</p> <p>Término enésimo de una progresión geométrica</p> <p>Suma de los n términos de una progresión geométrica finita</p> <p>Suma de una progresión geométrica infinita</p>	$u_n = u_1 + (n - 1)d$ $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ $u_n = u_1 r^{n-1}$ $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$ $S_\infty = \frac{u_1}{1 - r}, \quad r < 1$
<p>1.2</p>	<p>Potencias y logaritmos</p>	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b, \text{ donde } a > 0, b > 0, a \neq 1$ $a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a a^x = x = a^{\log_a x}$ $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
<p>1.3</p>	<p>Combinaciones</p> <p>Permutaciones</p> <p>Teorema del binomio</p>	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$
<p>1.5</p>	<p>Números complejos</p>	$z = a + ib = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta} = r \operatorname{cis} \theta$
<p>1.7</p>	<p>Teorema de de Moivre</p>	$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = r^n e^{in\theta} = r^n \operatorname{cis} n\theta$

Unidad 2: Funciones y ecuaciones

2.5	Eje de simetría del gráfico de una función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$
2.6	Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$

Unidad 3: Funciones circulares y trigonometría

3.1	Longitud del arco Área del sector circular	$l = \theta r$, siendo θ el ángulo medido en radianes y r el radio $A = \frac{1}{2}\theta r^2$, siendo θ el ángulo medido en radianes y r el radio
3.2	Identidades Relación fundamental	$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$ $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \cotan^2 \theta = \csc^2 \theta$
3.3	Fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos Fórmulas del ángulo doble	$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \text{cos } B \pm \text{cos } A \text{sen } B$ $\text{cos}(A \pm B) = \text{cos } A \text{cos } B \mp \text{sen } A \text{sen } B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \text{cos } \theta$ $\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2\text{cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

3.7	Teorema del coseno	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
	Teorema del seno	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$
	Área del triángulo	$A = \frac{1}{2} ab \text{sen } C$

Unidad 4: Vectores

4.1	Módulo de un vector	$ \mathbf{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, siendo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
	Distancia entre dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
	Coordenadas del punto medio de un segmento de recta que tiene por extremos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
4.2	Producto escalar	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w} \cos \theta$, siendo θ el ángulo formado por \mathbf{v} y \mathbf{w}
	Ángulo entre dos vectores	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$, siendo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\cos \theta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{ \mathbf{v} \mathbf{w} }$
4.3	Ecuación vectorial de una recta	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$
	Forma paramétrica de la ecuación de una recta	$x = x_0 + \lambda l$, $y = y_0 + \lambda m$, $z = z_0 + \lambda n$
	Ecuaciones cartesianas de una recta	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

4.5	Producto vectorial	$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}, \text{ siendo } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$
	Área del triángulo	$ \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w} \sin \theta, \text{ siendo } \theta \text{ el ángulo formado por } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{w}$ $A = \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{w} \text{ donde } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{w} \text{ forman dos lados del triángulo}$
4.6	Ecuación vectorial de un plano	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$
	Ecuación de un plano (usando el vector normal)	$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$
	Ecuación cartesiana de un plano	$ax + by + cz = d$

Unidad 5: Estadística y probabilidad

5.1	Parámetros de población	Sea $n = \sum_{i=1}^k f_i$
	Media μ	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$
	Varianza σ^2	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \mu^2$
	Desviación típica σ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$
5.2	Probabilidad de un suceso A	$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$
	Sucesos complementarios	$P(A) + P(A') = 1$
5.3	Sucesos compuestos	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5.4	Probabilidad condicionada Sucesos independientes Teorema de Bayes	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ $P(B A) = \frac{P(B) P(A B)}{P(B) P(A B) + P(B') P(A B')}$ $P(B_i A) = \frac{P(B_i) P(A B_i)}{P(B_1) P(A B_1) + P(B_2) P(A B_2) + P(B_3) P(A B_3)}$
5.5	Valor esperado de una variable aleatoria discreta X Valor esperado de una variable aleatoria continua X Varianza Varianza de una variable aleatoria discreta X Varianza de una variable aleatoria continua X	$E(X) = \mu = \sum x P(X = x)$ $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ $\text{Var}(X) = \sum (x - \mu)^2 P(X = x) = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2$ $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$
5.6	Distribución binomial Media Varianza Distribución de Poisson Media Varianza	$X \sim B(n, p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$ $E(X) = np$ $\text{Var}(X) = np(1-p)$ $X \sim \text{Po}(m) \Rightarrow P(X = x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $E(X) = m$ $\text{Var}(X) = m$
5.7	Variable normal tipificada o estandarizada	$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Unidad 6: Análisis

6.1	Derivada de $f(x)$	$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$
6.2	Derivada de x^n	$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
	Derivada de $\text{sen } x$	$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
	Derivada de $\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$
	Derivada de $\tan x$	$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
	Derivada de e^x	$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
	Derivada de $\ln x$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
	Derivada de $\sec x$	$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
	Derivada de $\csc x$	$f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cotan x$
	Derivada de $\cotan x$	$f(x) = \cotan x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
	Derivada de a^x	$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x (\ln a)$
	Derivada de $\log_a x$	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
	Derivada de $\arcsen x$	$f(x) = \arcsen x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Derivada de $\arccos x$	$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Derivada de $\arctan x$	$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Regla de la cadena	$y = g(u)$, siendo $u = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$	
Regla del producto	$y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	
Regla del cociente	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	

6.4	Integrales inmediatas	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x < a$
6.5	<p>Área bajo una curva</p> <p>Volumen de revolución (rotación)</p>	$A = \int_a^b y dx \text{ o bien } A = \int_a^b x dy$ $V = \int_a^b \pi y^2 dx \text{ o bien } V = \int_a^b \pi x^2 dy$
6.7	Integración por partes	$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx \text{ o bien } \int u dv = uv - \int v du$

Unidad 7: Estadística y probabilidad

Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 3

<p>7.1 (3.1)</p>	<p>Función generatriz de probabilidad para una variable aleatoria discreta X</p>	$G(t) = E(t^x) = \sum_x P(X = x)t^x$ $E(X) = G'(1)$ $\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$
<p>7.2 (3.2)</p>	<p>Combinaciones lineales de dos variables aleatorias independientes X_1, X_2</p>	$E(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1E(X_1) \pm a_2E(X_2)$ $\text{Var}(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2)$
<p>7.3 (3.3)</p>	<p>Estadísticos muestrales</p> <p>Media \bar{x}</p> <p>Varianza s_n^2</p> <p>Desviación típica s_n</p> <p>Estimación sin sesgo de la varianza de la población s_{n-1}^2</p>	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$ $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ $s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$
<p>7.5 (3.5)</p>	<p>Intervalos de confianza</p> <p>Media, con varianza conocida</p> <p>Media, con varianza desconocida</p>	$\bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\bar{x} \pm t \times \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$
<p>7.6 (3.6)</p>	<p>Estadísticos de contraste</p> <p>Media, con varianza conocida</p>	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

	Media, con varianza desconocida	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{n-1} / \sqrt{n}}$
7.7 (3.7)	Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson	$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$
	Estadístico de contraste para $H_0: \rho = 0$	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$
	Ecuación de la recta de regresión de x sobre y	$x - \bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2} \right) (y - \bar{y})$
	Ecuación de la recta de regresión de y sobre x	$y - \bar{y} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \right) (x - \bar{x})$

Unidad 8: Conjuntos, relaciones y grupos

Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 4

8.1 (4.1)	Leyes de de Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
----------------------------	--------------------	--

Unidad 9: Análisis

Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 5

9.5 (5.5)	Método de Euler	$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n, y_n); \quad x_{n+1} = x_n + h, \text{ siendo } h \text{ una constante (tamaño de paso)}$
	Factor integrante para $y' + P(x)y = Q(x)$	$e^{\int P(x)dx}$

9.6 (5.6)	Serie de Maclaurin	$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$
	Serie de Taylor	$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$
	Aproximaciones de Taylor (con término complementario $R_n(x)$)	$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$
	Expresión de Lagrange	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, donde c se encuentra entre a y x
	Serie de Maclaurin para funciones especiales	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ $\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ $\text{arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

Unidad 10: Matemática discreta

Ampliación de Matemáticas NS: Unidad 6

10.7 (6.7)	Fórmula de Euler para grafos planarios conexos	$v - e + f = 2$, siendo v el número de vértices, e el número de aristas y f el número de caras
	Grafos conexos, grafos simples, grafos planarios	$e \leq 3v - 6$ para $v \geq 3$ $e \leq 2v - 4$ si el grafo no tiene triángulos

Fórmulas para las distribuciones

Unidades 5.6, 5.7 y 7.1, y unidad 3.1 de Ampliación de Matemáticas NS

Distribuciones discretas

Distribución	Notación	Función general de probabilidad	Media	Varianza
Geométrica	$X \sim \text{Geo}(p)$	pq^{x-1} para $x = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial negativa	$X \sim \text{NB}(r, p)$	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ para $x = r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Distribuciones continuas

Distribución	Notación	Función densidad de probabilidad	Media	Varianza
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2

Unidad I: Álgebra lineal

1.2	Determinante de una matriz de orden 2×2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \mathbf{A} = ad - bc$
	Inversa de una matriz de orden 2×2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, ad \neq bc$
	Determinante de una matriz de orden 3×3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$